

القوى المركزية

(Central Forces)

3-1 تمهيد

إذا خضع جسم لقوة يمر خط تأثيرها من نقطة ثابتة دوماً وتعتمد قيمتها على بعد الجسم عن هذه النقطة فإننا نقول إنه خاضع لقوة مركزية (central force). نطلق على النقطة الثابتة اسم مركز القوة (force center).

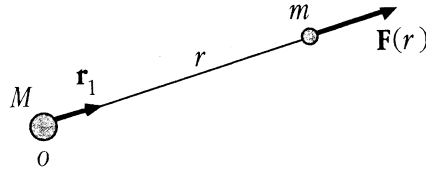
تعتبر دراسة حركة الأجسام تحت تأثير القوى المركزية من أهم المسائل في الفيزياء لأن أشهر القوى الطبيعية، كالجاذبية، والكهربائية، حتى النووية (أو إحدى مركباتها على الأقل)، هي مركزية. لذا سنخصص هذا الفصل لدراسة هذه الحركة، فنحدد معادلاتها ونوع المسار الذي يتحرك عليه الجسم الخاضع لها، ثم ندرس حركة الكواكب والأقمار ونستخرج قوانين كبلر الثلاثة في الفلك (Kepler's Laws)، وننتهي الفصل بدراسة تشتت رزفورد (Rutherford Scattering)، وحركة الصواريخ والمذنبات عند مرورها بالقرب من النجوم والكواكب.

3-2 الحركة تحت تأثير قوة مركزية

لنفترض أن لدينا جسيماً m يتحرك تحت تأثير قوة مركزية $F(r)$ ناتجة عن جسم آخر M موجود عند نقطة المبدأ O ، وكبير جداً بحيث لا يتأثر برد فعل m عليه فيبقى ساكناً عملياً. كما نفترض أن المسافة بين الجسمين M و m كبيرة جداً بحيث يمكن اعتبار كل واحد جسيماً نقطياً بالنسبة للآخر، كما في الشكل (1-3). من ثم نكتب القوة التي يخضع لها m بالشكل:

$$F(r) = F(r)\mathbf{r}_1 \quad (1-3)$$

حيث \mathbf{r}_1 متجه وحدة من مركز القوة إلى موضع الجسيم m و r بعده عن هذا المركز.



الشكل (1-3)

إذا كانت $R(r) > 0$ فالقوة تتجه بعيداً عن المركز، أي أنها طاردة، وإذا كانت $R(r) < 0$ فتتجه القوة نحو المركز، أي أنها جاذبة.

3-3 خواص الحركة تحت تأثير قوة مركزية

1-3-3 عزم القوة (Torque)

نعلم أن عزم قوة F مؤثرة على جسيم بالنسبة لنقطة O هو:

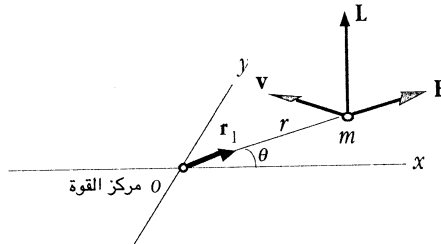
$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (2-3)$$

حيث \mathbf{r} متجه موضع الجسيم بالنسبة لـ O . انظر الشكل (2-3).

فإذا كانت القوة مركزية معطاة بالعلاقة (1-3) عندئذ يكون عزمها بالنسبة لمركزها O مساوياً إلى:

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)(\mathbf{r} \times \mathbf{r}_1) = 0 \quad (3-3)$$

فعزم أي قوة مركزية بالنسبة لمركزها يساوي الصفر دوماً.



الشكل (2-3)

3-3-2 الزخم الزاوي (Angular Momentum)

نعلم أن الزخم الزاوي L لجسيم m خاضع لقوة عزمها τ بالنسبة لنقطة O يعطى بالعلاقة:

$$(4-3) \quad \tau = \frac{dL}{dt}$$

ولكن $\tau=0$ ، أي أن:

$$(5-3) \quad L = \text{ثابت}$$

فالزخم الزاوي لأي جسم خاضع لقوة مركزية ثابت قيمةً واتجاهاً.

3-3-3 نوع الحركة (Type of Motion)

نعلم أن الزخم الزاوي لجسيم نقطي يتحرك بسرعة v بالنسبة لنقطة O هو :

$$(6-3) \quad L = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$$

حيث \mathbf{r} متجه موضع الجسيم بالنسبة لـ O .

إذا ضربنا طرفي العلاقة (6-3) عددياً بـ \mathbf{r} نجد :

$$(7-3) \quad \mathbf{r} \cdot L = m \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = 0$$

فمتجه الموضع \mathbf{r} عمودي دوماً على المتجه الثابت L ، أي أن الجسيم يتحرك في مستوى عمودي عليه. فحركة جسم خاضع لقوة مركزية هي حركة مستوية.

3-4 معادلات الحركة تحت تأثير قوة مركزية

وجدنا أعلاه أن حركة جسيم خاضع لقوة مركزية تتم في مستوى ليكن xy . بما أن القوة تعتمد على بعد الجسيم r عن المركز فقط لذا نستخدم الإحداثيات القطبية (r, θ) لتحديد موضعه وكتابة معادلات الحركة. فنكتب من قانون نيوتن الثاني:

$$(8-3) \quad F(\mathbf{r}) = m \mathbf{a}$$

بتعويض $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ من (1-3) والتسارع من (2-31) تؤول (3-8) إلى:

$$(9-3) \quad F(r)\mathbf{r}_1 = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{r}_1 + m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{\theta}_1$$

نستنتج من العلاقة الأخيرة أن:

$$(10-3) \quad F(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

و

$$(11-3) \quad m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0$$

تعني دراسة حركة الجسيم أن نحل المعادلتين (10-3) و(11-3) ونحدد كيف تتغير

r و θ بالنسبة لمركز القوة في كل لحظة من الزمن.

للقيام بذلك نلاحظ أنه إذا ضربنا طرفي (11-3) بـ r نحصل على:

$$m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}) = 0$$

أو :

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$

ولكن:

$$(12-3) \quad |\mathbf{L}| = |\mathbf{r} \times m\mathbf{v}| = |mr\mathbf{r}_1 \times (r\dot{\theta}\boldsymbol{\theta}_1)| = mr^2\dot{\theta}$$

أي أن:

$$(13-3) \quad L = mr^2\dot{\theta} = \text{ثابت}$$

ومنه:

$$(14-3) \quad \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

بتعويض $\dot{\theta}$ في (10-3) نجد:

$$(15-3) \quad m\ddot{r} - \frac{L^2}{mr^3} = F(r)$$

تحتوي المعادلة التفاضلية الأخيرة r ومشتقاتها بالنسبة للزمن فقط، فيمكن بالتالي إيجاد r بدلالة t (نظرياً على الأقل) وتعويضها في (14-3) لإجراء التكامل:

$$(16-3) \quad \theta = \int \dot{\theta} dt = \int \frac{L}{mr^2} dt + \theta_0$$

بذلك نكون قد وجدنا كل من r و θ بدلالة الزمن من قانون نيوتن الثاني.

3-5 معادلة مسار الجسيم المتحرك تحت تأثير قوة مركزية

ل للوصول إلى معادلة المسار الذي يتحرك عليه جسيم خاضع لقوة مركزية يجب حذف الزمن بين r و θ وإيجاد علاقة تربط بينهما. فنضع:

$$(17-3) \quad r = \frac{1}{u} \Rightarrow u = \frac{1}{r}$$

ونعوض في (14-3) فنجد:

$$(18-3) \quad \dot{\theta} = \frac{Lu^2}{m}$$

كما أن:

$$(19-3) \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \cdot \frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{d\theta} \dot{\theta} = -\frac{L}{m} \cdot \frac{du}{d\theta}$$

و

$$(20-3) \quad \ddot{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(-\frac{L}{m} \cdot \frac{du}{d\theta} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{L}{m} \cdot \frac{du}{d\theta} \right) \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\frac{L^2 u^2}{m^2} \cdot \frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

بتعويض كل من \ddot{r} و $\dot{\theta}$ في (10-3) نجد:

$$(21-3) \quad \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2 u^2} F\left(\frac{1}{u}\right)$$

يربط حل المعادلة التفاضلية الأخيرة بين u (أي $1/r$) و θ ، أي أنه يمثل معادلة المسار المنشودة.

3-6 الطاقة في الحركة تحت تأثير قوة مركزية

تعتبر الطريقة المذكورة في الفقرة السابقة مفيدة لتتبع حركة جسيم خاضع لقوة مركزية إن أمكن حل المعادلة (3-15) وإجراء التكامل (3-16). إلا أن هذا قد لا يكون سهلاً في حالات كثيرة. إضافة لذلك، يمكن معرفة الكثير عن نوع الحركة، وشكل الطريق الذي يسير عليه الجسيم، وغير ذلك من الكميات المتعلقة بهذه الحركة، بالاستفادة من ثبات الطاقة الميكانيكية الكلية لجسم خاضع لقوى محافظة. لذا نكتب الطاقة الميكانيكية الكلية:

$$E = T + U$$

حيث نكتب طاقة الحركة للجسيم بالشكل:

$$(22-3) \quad T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

بتعويض $\dot{\theta}$ من (3-14) نجد:

$$(23-3) \quad T = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2}$$

كما نكتب طاقة الوضع:

$$(24-3) \quad U = V(r) = -\int_{r_s}^r \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

حيث نختار $r_s = \infty$ ، الذي تنعدم عنده القوة وطاقة الوضع، عندها تؤول الطاقة الميكانيكية الكلية إلى:

$$(25-3) \quad E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

نلاحظ من المعادلة (25-3) أن الطاقة الكلية تتألف من مجموع حدين: أولاهما $\frac{1}{2} m \dot{r}^2$ يمثل طاقة حركة انتقالية (نصف الكتلة مضروباً بمربع السرعة القطرية)، والثاني $L^2/2mr^2 + V(r)$ يعتمد على بعد الجسيم r عن مركز القوة فقط، بالإضافة لثوابت الحركة من كتلة وزخم زاوي وثابت القوة المركزية. لذا يُطلق على هذا الحد اسم **الجهود الفعّال** (*effective potential*)، لأنه يشبه طاقة الوضع في حالة الحركة على خط مستقيم، ونضع:

$$(26-3) \quad E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V'(r)$$

حيث:

$$(27-3) \quad V'(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

سنرى أهمية هذه الكمية وكيف نستخدمها لمعرفة أنواع الحركة الممكنة للجسيم. من جهة أخرى، يمكن الاستفادة من (25-3) وكون E ثابتة للتوصل إلى معادلة تعطي تغيرات r مع الزمن، فنكتب:

$$(28-3) \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - V'(r)]}$$

بمكاملة هذه العلاقة نجد:

$$(29-3) \quad \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E - V'(r)}} = \sqrt{\frac{2}{m}} (t - t_0)$$

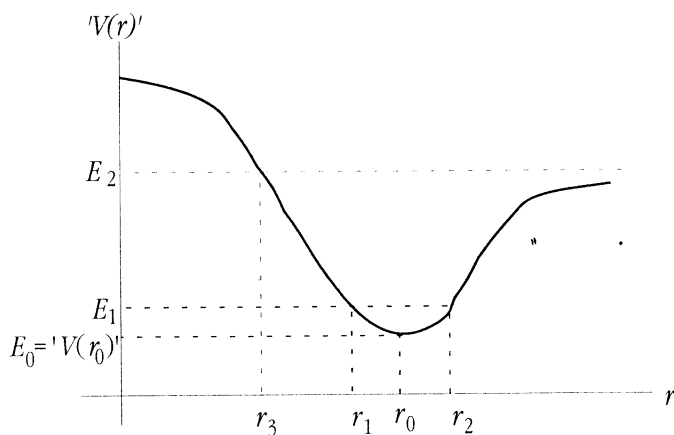
من ثم يمكن معرفة تغيرات r مع الزمن من (29-3) (إن أمكن إجراء التكامل) ونعوضها في (14-3) لنجد $\theta(t)$ أيضاً. نلاحظ أن العلاقتين (10-3) و (11-3) هي معادلات تفاضلية من الدرجة الثالثة

(لماذا؟)، لكننا وصلنا إلى حلها بإجراء تكامل واحد فقط لكل من r و θ ، سبب ذلك كون E و L ثابتين. لذلك يطلق على كل منها اسم تكامل أولي (first integral) أو ثابت حركة (constant of motion).

3-7 دراسة الحركة تحت تأثير قوة مركزية باستخدام الطاقة

سندرس في هذه الفقرة أنواع الحركة الممكنة لجسيم خاضع لقوة مركزية بشكل وصفي، بالاستفادة من ثبات طاقته الميكانيكية بحسب الأشكال المحتملة للجهد الفعّال الخاضع له.

نلاحظ من العلاقة (3-28) أن المقدار المجذور يجب أن يكون موجباً دوماً، أي يجب أن يكون $E \geq V(r)$ وهذا هو الشرط الأساس الذي نستخدمه لفهم طبيعة الحركة الممكنة. فإذا رسمنا تغيرات $V(r)$ مع بعد الجسيم r عن مركز القوة، ولنفترض أننا حصلنا على الشكل (3-3)، عندئذ ندرس القيم الممكنة للطاقة الميكانيكية E . فنلاحظ مايلي:

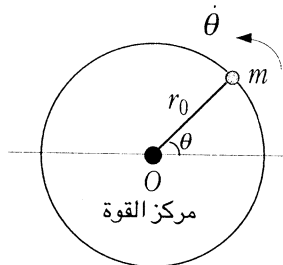


الشكل (3-3)

- 1 - إذا كانت $E = E_0 = V(r_0)$ ، حيث $V(r_0)$ أصغر قيمة ممكنة للجهد الفعّال، عندئذ يجب أن يبقى بعد الجسيم عن مركز القوة ثابتاً، أي أن: ثابت $r = r_0$ ، لأن أي بُعد آخر سيجعل $E < V(r)$ وهذا غير مسموح به طبيعياً.

في هذه الحالة تصير السرعة القطرية مساوية للصفر دوماً، لذا يدور الجسم على دائرة نصف قطرها r_0 بسرعة زاوية ثابتة $\dot{\theta}$ نجدها من العلاقة (3-14) بوضع $r=r_0$ انظر الشكل (3-4):

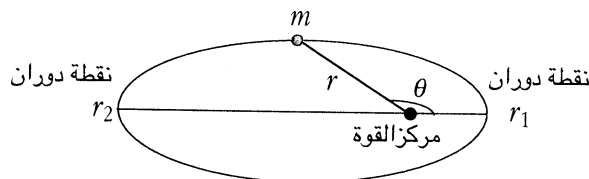
$$\dot{\theta}_0 = \frac{L}{mr_0^2} \quad (3-30)$$



الشكل (3-4)

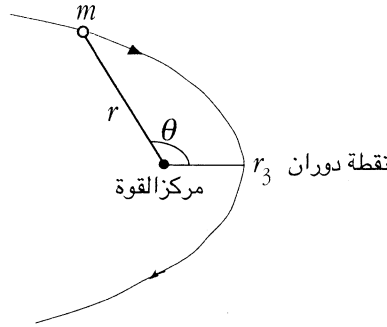
2- إذا كانت $E = E_1 > V(r_0)$ عندئذ نلاحظ أن r ستكون محصورة بين القيمتين r_1 و r_2 فقط لأن $V(r)$ سيصير أكبر من الطاقة الكلية E خارج هذا المجال مما سيجعل المقدار المجنور في (3-28) سالباً وهذا غير ممكن بالطبع. لذلك يتحرك الجسم بحيث تتغير r دورياً بين r_1 و r_2 ، فيبتعد الجسم عن مركز القوة خلال دورانه حوله إلى أن يصل لبعده r_2 ثم يقترب منه إلى r_1 ، وهكذا دواليك.

أبسط مثل على هذه الحركة هو الدوران على قطع ناقص (*ellipse*) نصف قطريه r_1 و r_2 ، كما في الشكل (3-5). نلاحظ هنا أن السرعة القطرية تنعدم عند هاتين النقطتين، لذلك نطلق عليهما اسم **نقاط دوران** (*turning points*).



الشكل (3-5)

3- إذا كانت $E \geq E_2$ عندئذ إذا كان الجسم يتحرك أصلاً باتجاه مركز القوة فإن أقرب مسافة سيصل إليها هي r_3 حيث تنعدم هناك سرعته القطرية ويدور منحرفاً عن مساره الأصلي ثم يبتعد عن مركز القوة إلى ما لانهاية، كما في الشكل (6-3). أي أن r_3 هي نقطة دوران في هذه الحالة.



الشكل (6-3)

نستنتج من المناقشة السابقة أن شكل الطريق الذي سيتحرك عليه الجسم الخاضع لقوة مركزية يعتمد على طاقته الكلية التي "بدأ" بها، وعلى الجهد الفعّال الذي يتحرك فيه، أي على شكل القوة المؤثرة عليه.

3- 8 الحركة على مسار دائري واستقرار المسار

نعود الآن إلى الحالة التي تكون فيها طاقة الجسم الكلية أكبر بقليل من أصغر قيمة للجهد الفعّال، إن وُجدت، (الحالة 2 أعلاه) التي استنتجنا منها أن الجسم يدور حول مركز القوة بحيث لا يتغير بعده عنه كثيراً عن قيمة معينة r_0 . نلاحظ أنه حتى يتحقق هذا يجب أن تكون هناك قيمة صغرى للجهد الفعّال أي يجب أن يكون:

$$(31-3) \quad \left. \frac{d^2 V^1(r)}{dr^2} \right|_{r=r_0} > 0 \quad \text{و} \quad \left. \frac{dV^1(r)}{dr} \right|_{r=r_0} = 0$$

عندها يتغير بُعد الجسم عن مركز القوة خلال دورانه حوله بشكل اهتزازي بسيط سرعته الزاوية معطاة بالعلاقة (انظر الفقرة 9-1 والعلاقة (41-1)):

(32-3)

$$\omega^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{d^2 V(r)}{dr^2} \right)_{r=r_0}$$

أي أن الجسم سيتحرك على مسار دائري نصف قطره r_0 بسرعة زاوية θ ويهتز بنفس الوقت حول نصف القطر هذا بتردد ω .

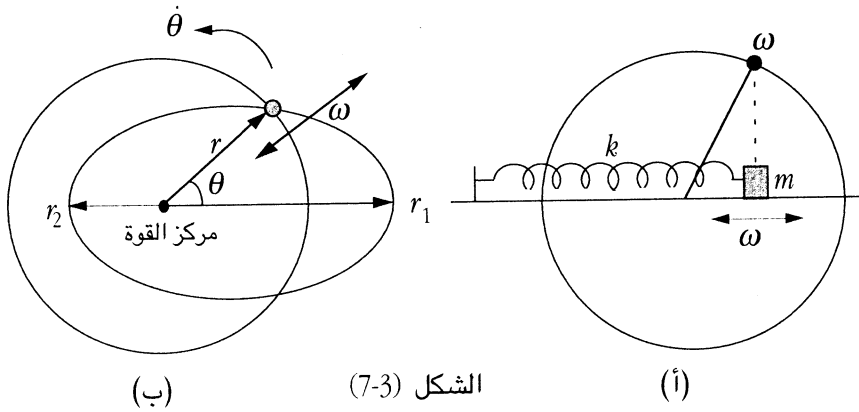
3-9 المعنى الفيزيائي لـ ω و θ

نعلم أنه عندما يتحرك جسم على دائرة فإن سرعته الزاوية تمثل مقدار الزاوية التي يدورها في واحدة الزمن، وتقدر عادة بالراديان، مثل الأرض التي تدور حول الشمس، أو الإلكترون حول البروتون في ذرة الهيدروجين، وهكذا دواليك، كما في الشكل (4-3).

نعلم كذلك أنه عندما يهتز جسيم m مربوط بزنبك k حركة اهتزازية بسيطة فإننا نربط اهتزازاته بمسقط حركة جسم يدور على دائرة بوساطة التمثيل الدائري للحركة الاهتزازية ونطلق على $\omega = (k/m)^{1/2}$ اسم السرعة الزاوية للجسم الذي يدور على الدائرة، كما في الشكل (3-7 أ).

كما وجدنا في دراستنا الحالية أن الجسيم الخاضع لقوة مركزية يتحرك في مستو، وأن لسرعته مركبتين إحداها قطرية $v_r = \dot{r}$ ، تدل على تغير بعد الجسم عن مركز القوة (كاهتزاز جسم مربوط بزنبك)، والثانية مماسية $v_\theta = r\dot{\theta}$ ، تدل على المسافة التي يقطعها الجسم في واحدة الزمن حول مركز القوة (كدوران جسم على دائرة) حيث تمثل $\dot{\theta}$ الزاوية التي يدورها خلال ذلك، أي سرعته الزاوية.

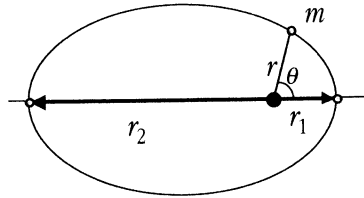
فإذا دار جسم على دائرة نصف قطرها r يتغير بين قيمتين r_1 و r_2 فإن $\dot{\theta}$ تدل على سرعته الزاوية خلال الدوران بينما تدل ω على السرعة الزاوية لتغير r ، كما في الشكل (3-7 ب).



الشكل (7-3)

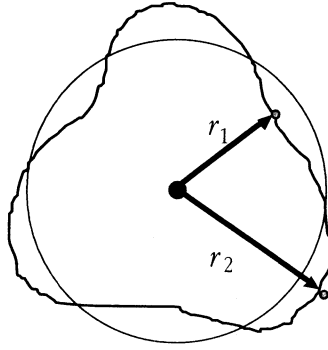
نلاحظ هنا أن شكل المسار يتغير بحسب الحالات التالية :

1- $\dot{\theta} = \omega$: أي أن الزمن اللازم للجسيم ليدور دورة واحدة حول مركز القوة ($2\pi/\omega$) يساوي الزمن اللازم لتتغير r من r_1 مثلاً إلى r_2 ثم عودة لـ r_1 (أي $2\pi/\omega$). فيعود الجسيم إلى النقطة التي بدأ منها، ويكون قد تحرك على مسار بسيط مغلق، كقطع ناقص، كما في الشكل (8-3). نلاحظ هنا أن الزاوية التي يدورها الجسم عندما تتغير r من r_1 إلى r_2 تساوي π .



الشكل (8-3)

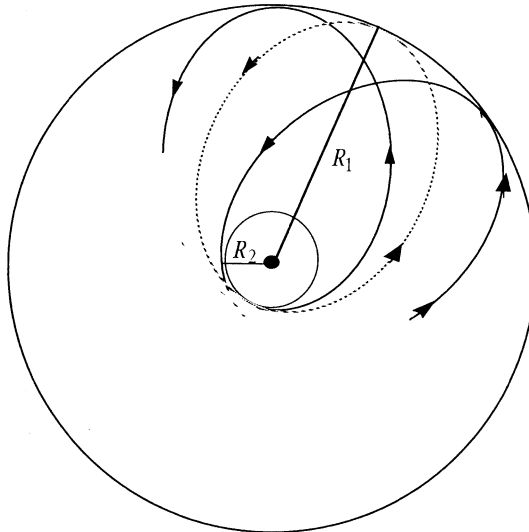
2- $\dot{\omega} = n\dot{\theta}$ ، حيث n عدد صحيح: أي أن الزمن اللازم للجسيم ليدور دورة واحدة حول مركز القوة يساوي أضعافاً صحيحة من الزمن اللازم ليتغير بعده عن هذا المركز بين أكبر وأصغر قيمة له. فخلال دورة واحدة إذاً تتغير r عدداً صحيحاً من المرات، وعندما يعود الجسيم للنقطة التي بدأ منها تكون r قد عادت أيضاً إلى قيمتها التي بدأت منها فيرسم الجسيم مساراً متعرجاً في هذه الحالة إلا أنه يبقى مغلقاً بسيطاً، كما في الشكل (9-3).



الشكل (9-3)

3- $m\omega \neq n\dot{\theta}$ ، حيث m و n أي عددين صحيحين: أي يبدأ الجسم حركته من نقطة ولا يعود إليها مطلقاً فيصير المسار قطعاً ناقصاً يدور حول محور عمودي على مستويه ومار من مركزه مع مرور الزمن، كما في الشكل (10-3)، الذي نلاحظ منه أنه عندما تتغير r بين r_1 و r_2 فإن θ لا تتغير بمقدار 180° (كما في الحالة 1) بل تتغير بمقدار معطى بالعلاقة (برهن ذلك):

$$(3-33) \quad \Delta\theta = \int_{r_1}^{r_2} \frac{L}{r^2 \sqrt{2m(E - V(r))}} dr$$



الشكل (10-3)

3 - 10 الحركة تحت تأثير قوة مركزية متناسبة عكساً مع مربع البعد

تتصف أهم القوى الطبيعية، كقوة التجاذب الكتلي أو قوة كولوم الكهربائية، أنها مركزية تتناسب قيمتها عكساً مع مربع البعد بين الجسمين المتفاعلين. لذا فإن دراسة هذا النوع من القوى بالتفصيل يعتبر من أهم المواضيع في الفيزياء، سواء التقليدية (classical) أو الحديثة (modern)، لأنها تعطي المفتاح الرئيس لفهم طبيعة تركيب المادة بدءاً من الأجسام الكونية الكبيرة انتهاءً بأدق الجسيمات في الذرة. لذلك نفترض فيما يلي أن لدينا جسيماً m يخضع لتأثير قوة مركزية متناسبة عكساً مع مربع البعد بينه وبين مصدرها، الذي نفترض أنه جسم آخر M كتلته كبيرة جداً بالمقارنة مع m ، بحيث يبقى مركز القوة عملياً ساكناً في مكانه. من ثم نكتب القوة المؤثرة على m بالشكل:

$$\mathbf{F}(r) = \frac{k}{r^2} \mathbf{r}_1 \quad (35-3)$$

حيث k ثابت القوة المركزية، وتكون \mathbf{F} جاذبة إذا كانت $k < 0$ وطاردة إذا كانت $k > 0$. من الأمثلة المهمة على قوة جاذبة متناسبة عكساً مع مربع البعد التجاذب الكتلي بين الأجسام، تعطى قيمتها بالعلاقة:

$$F(r) = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad (36-3)$$

حيث G ثابت الجاذبية العام ويساوي $6.67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}$. نلاحظ أن k في هذه الحالة هو Gm_1m_2 .

كما تعتبر قوة كولوم الكهربائية بين شحنتين نقطيتين من القوى المركزية الهامة وتعطى قيمتها بالعلاقة:

$$F(r) = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (37-3)$$

حيث ϵ_0 سماحية الخلاء (permittivity constant) ويساوي $8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N.m}^2$. نلاحظ أن k في هذه الحالة يساوي $q_1q_2/4\pi\epsilon_0$.

3- 10- 1 طاقة الوضع والطاقة الميكانيكية الكلية

لحساب طاقة وضع جسم خاضع لقوة مركزية متناسبة عكساً مع مربع البعد
نستخدم (2-69) فنجد:

$$(38-3) \quad V(r) = \frac{k}{r}$$

كما نحسب الطاقة الميكانيكية الكلية :

$$(39-3) \quad E = K + V(r) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{k}{r}$$

بوضع

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

تؤول (39-3) إلى:

$$(40-3) \quad E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + 'V(r)'$$

حيث ' $V(r)$ ' الجهد الفعّال:

$$(41-3) \quad 'V(r)' = \frac{k}{r} + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 = \frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$$

3- 10- 2 معادلة المسار

لإيجاد معادلة المسار لجسم خاضع لقوة مركزية متناسبة عكساً مع مربع البعد
نستخدم المعادلة (3-29) ونكتب:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{m}{L^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right)$$

بوضع

$$F\left(\frac{1}{u}\right) = ku^2$$

تصير معادلة المسار :

$$(42-3) \quad \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{mk}{L^2}$$

المعادلة الأخيرة تفاضلية من الدرجة الثانية بطرف ثاني حلها:

$$(43-3) \quad u = \frac{1}{r} = A \cos \theta - \frac{mk}{L^2}$$

حيث A ثابت تكامل يعتمد على الشروط الابتدائية للحركة.

بتعويض $u=1/r$ نجد:

$$(44-3) \quad r = \frac{L^2 / mk}{-1 + (L A / mk) \cos \theta}$$

أو

$$(45-3) \quad r = \frac{p}{-1 + \varepsilon \cos \theta}$$

حيث وضعنا:

$$(46-3) \quad p = \frac{L^2}{mk}$$

و

$$(47-3) \quad \varepsilon = pA = \frac{L^2 A}{mk}$$

تمثل (45-3) منحنى قطعي (conic section) يدل ε فيه على معامل شذوذه عن الدائرة (eccentricity)، لأنه:

إذا كان $\varepsilon = 0$ يصير المنحنى دائرة (circle) (غير شاذ)

وإذا كان $\varepsilon < 1$ يصير قطعاً ناقصاً (ellipse) (ε ينقص عن الواحد)

وإذا كان $\varepsilon = 1$ يصير قطعاً مكافئاً (parabola) (ε يكافئ الواحد)

وإذا كان $\varepsilon > 1$ يصير قطعاً زائداً (hyperbola) (ε يزيد عن الواحد)

نستنتج إذاً أن نوع المسار الذي يتحرك عليه الجسم الخاضع لقوة متناسبة عكساً مع مربع البعد يعتمد على نوع القوة، جاذبة أو طاردة (من خلال E)، والشروط الابتدائية من طاقة وزخم زاوي (L و E).

3- 11 أنواع المسارات الممكنة لجسم خاضع لقوة مركزية متناسبة

عكساً مع مربع البعد

يمكن معرفة فيما إذا سيكون مسار جسم خاضع لقوة مركزية متناسبة عكساً مع مربع البعد منحنياً مغلقاً (دائرة أو قطعاً ناقصاً) أو مفتوحاً (قطعاً زائداً أو مكافئاً)، من طاقته الكلية، وإشارة القوة التي يخضع لها، ودراسة نهايات الجهد الفعّال، كما فعلنا في الفقرة 3-3.

ذلك أنه إذا كان للجهد الفعّال نهاية صغرى فيمكن لبعد الجسم عن مركز القوة أن يتغير بشكل دوري ويحتمل نتيجة لذلك أن يصير المسار مغلقاً. أما إذا لم تكن هناك نهاية صغرى للجهد الفعّال فلا يمكن للبعد أن يتغير دورياً ويكون المسار منحنى مفتوح بالتأكيد.

نعتبر فيما يلي الإشارتين الممكنتين للقوة:

1- القوة نابذة $k > 0$

إذا خضع جسم لقوة نابذة ($k > 0$) فإن طاقته الكلية ستكون موجبة حتماً لأن

$$(48-3) \quad E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \left(\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \right) > 0$$

هذا منطقي تماماً، إذ لا يعقل أن يرتبط جسم بمركز قوة يطرده بعيداً عنه! لهذه النتيجة أهمية كبيرة على نوع المسار الذي يمكن أن يتحرك الجسم عليه، الذي نحدده بدراسة نهايات الجهد الفعّال. نلاحظ من (41-3) أن:

$$(49-3) \quad \frac{d'V(r)}{dr} = -\frac{k}{r^2} - \frac{L^2}{mr^3} \neq 0$$

بما أن $k > 0$ و $L^2 > 0$ فلا يمكن أن تكون (3-49) مساوية للصفر أبداً، أي لا توجد نهاية للجهد الفعّال. فالمسار منحنى غير مغلق كقطع زائد أو مكافئ، فيتحرك الجسم بحيث يقترب من مركز القوة إلى نقطة معينة ثم ينحرف مبتعداً إلى ما لا نهاية. لمعرفة فيما إذا كان المسار قطعاً زائداً أم مكافئاً يجب معرفة ما إذا كان $\varepsilon \geq 1$. لذلك نستخدم معادلة المسار (3-45) ومعادلة الطاقة الكلية (3-48). فنلاحظ من الأولى أن r ستكون أصغر ما يمكن عندما يكون $\cos \theta = +1$ ، عندئذ تصبح قيمتها:

$$(3-50) \quad r_{\min} = \frac{p}{-1 + \varepsilon} = \frac{L^2 / mk}{-1 + L^2 A / mk}$$

من جهة أخرى فإن السرعة القطرية للجسيم ستكون معدومة عندما $r = r_{\min}$ لأن هذه النقطة هي نقطة الدوران الوحيدة له في مساره. لذلك نضع $\dot{r} = 0$ في معادلة الطاقة فنجد:

$$(3-51) \quad E = V(r_{\min}) = \frac{k}{r_{\min}} + \frac{L^2}{2mr_{\min}^2}$$

باختصار r_{\min} بين (3-50) و (3-51) نجد:

$$(3-52) \quad A^2 = \frac{m^2 k^2}{L} + \frac{2mE}{L^2} = \frac{m^2 k^2}{L^4} \left(1 + \frac{2EL^2}{mk^2}\right)$$

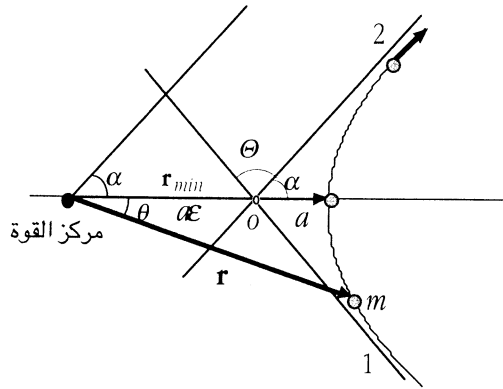
بحسب (3-47) يكون :

$$(3-53) \quad \varepsilon = \frac{L^2 A}{mk} = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$$

بما أن $E > 0$ دوماً في هذه الحالة مما يعني أن الجذر في (3-53) أكبر من الواحد، أي أن $\varepsilon > 1$ فيكون المسار هو الفرع السالب من قطع زائد حتماً، كما في الشكل (3-11)

يقع مركز القوة عند أحد محرقيه (بؤرة) (*focal point*) بحيث يأتي الجسم من اللانهاية مقترباً من مركز القوة إلى أن يصير على بعد $r = r_{\min}$ ثم يبتعد بعد ذلك إلى مالانهاية مرة أخرى.

نتذكر دوماً أن موضع الجسم بالنسبة لمركز القوة يتحدد بالبعد r والزاوية θ ، كما في الشكل (11-3).



الشكل (11-3)

يتضح من الشكل (11-3) أن الجسم كان قادماً أصلاً على الخط 1 إلا أن وجود مصدر لقوة طاردة حرفة عن مساره تدريجياً إلى أن صار يتحرك أخيراً على الخط 2 عند مسافات كبيرة من مصدر القوة. لهذا نعرف زاوية انحراف أو بالأصح زاوية تشتت الجسم (*scattering angle*) Θ بالعلاقة:

$$\Theta = \pi - 2\alpha \quad (54-3)$$

حيث α هي قيمة θ عندما يبتعد الجسم إلى مالانهاية ونحصل عليها من العلاقة (45-3) بوضع $r \rightarrow \infty$ فنجد:

$$\theta_{\infty} = \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \quad (55-3)$$

يمكن إيجاد أقرب مسافة r_{\min} يصل إليها الجسم من مركز القوة من الشكل

(11-3) فنكتب :

(56-3)

$$r_{\min} = a + a\varepsilon = a(1 + \varepsilon)$$

بكتابة معادلة القطع الزائد بشكلها الهندسي :

(57-3)

$$r = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{-1 + \varepsilon \cos \theta} = \frac{p}{-1 + \varepsilon \cos \theta}$$

بمقارنة طرفي العلاقة الأخيرة نستنتج أن:

(58-3)

$$p = a(\varepsilon^2 - 1) = \frac{L^2}{mk}$$

بتعويض ε من (53-3) نجد:

(59-3)

$$a = \frac{k}{2E}$$

كما أن:

(60-3)

$$r_{\min} = a(1 + \varepsilon) = \frac{k}{2E} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}} \right]$$

بذلك نكون قد حددنا مسار جسيم خاضع لقوة مركزية نابذة متناسبة عكساً مع مربع البعد بأنه الفرع السالب من قطع زائد، كما وجدنا الخواص الهندسية لهذا القطع كعامل شذوذه (ε) ، ويعد ذروته عن مركزه (a) ، وأقرب نقطة يصل إليها من مركز القوة (r_{\min}) ، بدلالة ثابت القوة k ، وثابت الحركة L و E .

2- القوة جاذبة $k < 0$

إذا تحرك جسيم تحت تأثير قوة جاذبة متناسبة عكساً مع مربع البعد عندئذ نلاحظ من معادلة الطاقة الكلية (3-40) أنه يمكن لـ E أن تكون موجبة أو معدومة أو سالبة. إذ أن :

(61-3)

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \left(\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \right)$$

بما أن $k < 0$ فإنه من الممكن أن تكون E موجبة أو سالبة أو مساوية للصفر، بحسب الشروط الابتدائية (أي ثوابت الحركة) للجسيم. لذا يعتمد نوع الحركة بشكل واضح على الطاقة الكلية والزخم الزاوي.

لتحديد نوع المسار نجد نهايات الجهد الفعّال $'V(r)'$:

$$(62-3) \quad \frac{'V(r)'}{dr} = -\frac{k}{r^2} - \frac{L^2}{mr^3}$$

من الواضح أن $d'V(r)/dr = 0$ عندما $r = r_0$ حيث:

$$(63-3) \quad r_0 = -\frac{L^2}{(-mk)} = \frac{L^2}{m|k|}$$

فهناك احتمال أن يتحرك الجسيم على مسار مغلق أو غير مغلق وذلك بحسب طاقته الكلية:

1- فإذا كان $E = 'V(r_0)'$ عندئذ تصير السرعة المماسية $\dot{r} = 0$ دائماً ويتحرك الجسيم على مسار دائري نصف قطره r_0 .

2- وإذا كان $E > 'V(r_0)'$ عندئذ يتحرك الجسيم على مسار مغلق بسيط بحيث يتغير بعده عن مركز القوة بين قيمة صغرى ($r_1 = r_{\min}$) وقيمة عظمى ($r_2 = r_{\max}$). يطلق على r_1 اسم نقطة الذنب (perihelion) في حالة حركة الكواكب حول الشمس، ونقطة الحضيض (perigee) عند دوران الأقمار (الطبيعية والصناعية) حول الأرض. كما يطلق على r_2 اسم نقطة الرأس (aphelion) لحركة الكواكب حول الشمس وأوج المدار (apogee) في حالة حركة الأقمار حول الأرض.

يمكن تحديد كل من r_1 و r_2 من معادلة المسار (3-45) والطاقة الكلية (3-61). نضع

$$\cos \theta = \pm 1 \text{ في الأولى فنجد:}$$

$$(64-3) \quad r_{1,2} = \frac{p}{-1 \pm \epsilon} = \frac{L^2 / mk}{-1 \pm L^2 A / mk}$$

ونضع $\dot{r} = 0$ في الثانية فنجد:

$$(65-3) \quad E = \frac{k}{r_{1,2}} + \frac{L^2}{2mr_{1,2}^2}$$

باختصار $r_{1,2}$ بين المعادلتين الأخيرتين نجد:

$$(66-3) \quad A^2 = \frac{m^2 k^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2} = \frac{m^2 k^2}{L^4} \left(1 + \frac{2EL^2}{mk^2}\right)$$

بتعويض A في (47-3) نجد:

$$(67-3) \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$$

فإذا كانت طاقة الجسم الكلية موجبة عندئذ يكون $\varepsilon > 1$ ويكون المسار قطعاً زائداً، كما في الحالة السابقة. أما إذا كانت الطاقة الكلية مساوية للصفر عندها يكون $\varepsilon = 1$ ويصير المسار قطعاً مكافئاً معادلته:

$$(68-3) \quad r = \frac{p}{-1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)}$$

أخيراً إذا كانت الطاقة الكلية سالبة عندها يكون $\varepsilon < 1$ ويتحرك الجسم على مسار قطع ناقص نحدد ثوابته الهندسية، كنصف قطره الكبير a ، والصغير b ، كما في الشكل (12-3)، بملاحظة أنه يمكن كتابة معادلته بالشكل:

$$(69-3) \quad r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{-1 + \varepsilon \cos \theta} = \frac{L^2 / mk}{-1 + (L^2 A / mk) \cos \theta}$$

أي أن:

$$a(1 - \varepsilon^2) = \frac{L^2}{mk}$$

بتعويض ε من (67-3) نجد:

$$(70-3) \quad a = -\frac{k}{2|E|}$$

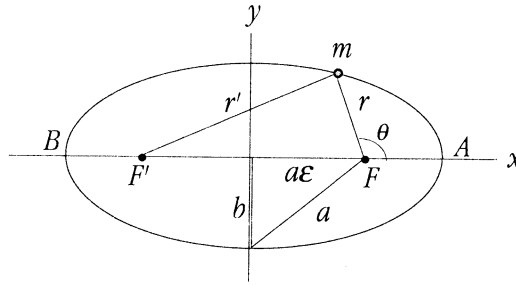
أي أن:

$$E = -\frac{k}{2a} \quad (71-3)$$

ثم نحسب طول نصف القطر الصغير b من الشكل (12-3) بكتابة:

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{L^2}{(-mk)} \quad (72-3)$$

بذلك نكون قد حددنا مسار جسم خاضع لقوة مركزية جاذبة سواء كانت طاقته الكلية موجبة أم سالبة أم معدومة، وعيّنّا الخواص الهندسية للقطع الناتج في كل حالة.



الشكل (12-3)

3 - 12 مسارات القطوع الناقصة ومسألة كبلر (Kepler's Problem)

توصل جوهانز كبلر (Johannes Kepler 1630-1571) لوضع ثلاثة قوانين تصف حركة الكواكب حول الشمس بعد أن درس وحلل المعلومات الفلكية التي كانت متوفرة آنئذ، بخاصة تلك التي حصل عليها تايكو براهي (Tycho Brahe 1601-1546) من مشاهداته لمواقع الكواكب حول الشمس على مدى فترة طويلة من الزمن.

هذه القوانين هي :

1- قانون المسارات: تتحرك الكواكب حول الشمس في مسارات قطع ناقص

بحيث تقع الشمس عند أحد المحرقين (البؤرتين).

2- قانون المساحات: يمسح المتجه الواصل من الشمس إلى الكوكب مساحات

متساوية في أزمنة متساوية خلال دوران الكوكب حول الشمس.

3- قانون التناسب: يتناسب مربع دور حركة الكوكب حول الشمس طردياً مع

مكعب نصف القطر الكبير لمساره.

يمكن استخلاص قوانين كبلر من قوانين نيوتن في الحركة. نثبت ذلك فيما يلي:

(أ) تتحرك الكواكب خاضعة لقوة مركزية جاذبة متناسبة عكساً مع مربع البعد

(قانون الجاذبية العام) وطاقتها الكلية سالبة (تحقق من ذلك!) لذا فهي تتحرك على

قطوع ناقصة، كما وجدنا آنفاً. هذا هو قانون المسارات.

(ب) يمكن حساب المساحة التي يمسحها المتجه الواصل من الشمس الواقعة عند

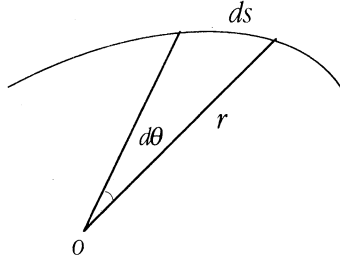
مركز (بؤرة) القطع الناقص إلى المتجه خلال زمن معين من الشكل (3-13) وملاحظة

أن المساحة المسوحة خلال زمن dt تساوي:

$$(73-3) \quad ds \approx \frac{1}{2}(rd\theta)r$$

أي أن:

$$(74-3) \quad \frac{ds}{dt} \approx \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \dot{\theta}$$



الشكل (3-13)

بتعويض $\dot{\theta}$ من (3-14) نجد:

$$(75-3) \quad \frac{ds}{dt} \approx \frac{L}{2m} = \text{ثابت}$$

فالسرعة المساحية (areal speed) ثابتة. هذا هو قانون المساحات .

(ج) نحسب الزمن اللازم ليدور الكوكب حول الشمس دورة كاملة بمكاملة (75-3) فنجد:

$$(76-3) \quad s = \frac{L}{2m} T$$

حيث s مساحة القطع الناقص المسوح التي تساوي:

$$(77-3) \quad s = \pi ab$$

بتعويض b من (72-3) واستخدام (71-3) نجد:

$$(78-3) \quad s = \pi a^2 \left(\frac{2L^2 |E|}{mk^2} \right) = \frac{L}{2m} T$$

ومنه:

$$(79-3) \quad T^2 = \frac{4\pi^2 m}{(-k)} a^3$$

أي أن مربع الدور يتناسب مع مكعب نصف القطر الكبير للقطع الناقص. هذا هو قانون التناسب.

يتضح مما تقدم أن قوانين كبلر تنتج تلقائياً من قوانين نيوتن في الحركة، إلا أن حركة الكواكب الفعلية ليست بهذه البساطة نتيجة وجود كواكب أخرى في المجموعة الشمسية. فيجتمل أن تحوي القوة المركزية المؤثرة على كل كوكب على حدودٍ أخرى غير $1/r^2$ مما يجعل المسارات مختلفة بعض الشيء عما وجدناه سابقاً.

3- 13 مسارات القواطع الزائدة وتشتت رزرفورد (Rutherford Scattering)

إذا خضع جسم لقوة مركزية نابذة فإنه يتحرك على قطع زائد، بطاقة أكبر من الصفر دوماً. من الأمثلة على ذلك اقتراب بروتون موجب الشحنة من نواة ثقيلة موجبة الشحنة أيضاً فتدفعه بعيداً عنها مما يؤدي لانحرافه عن مساره الأصلي ويتحرك على مسار قطع زائد.

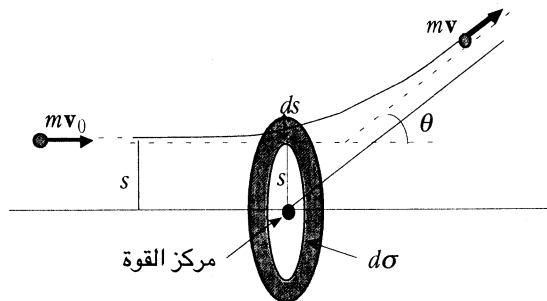
من جهة أخرى، إذا خضع جسم حر (أي أن طاقته الكلية موجبة) لقوة مركزية جاذبة فإنه يتحرك أيضاً على مسار قطع زائد. مثل ذلك حركة الجسيمات السماوية، كالنايزك والشهب، بالقرب من نجم كبير عندما تأتي من بعيد بطاقة حركية كبيرة، وعند اقترابها من النجم تتأثر بجاذبيته منحرفة أيضاً عن مسارها لتتحرك على قطع زائد. الفرق بين هذه الجسيمات والكواكب المتحركة على قطوع ناقصة حول نجم ما، كالشمس، هو أن الأخيرة كانت جزءاً من النجم وانشطرت مبتعدة عنه، إلا أن طاقاتها الكلية السالبة لم تكن كافية لتتخلص من جذبه فبقيت مرتبطة به. أما الشهب والنايزك فإنها تتحرك في الفضاء السحيق بشكل حر وطاقة كلية عالية فيؤدي جذب النجم لها عند مرورها بالقرب منه لحرفها فقط دون التقاطها وإبقائها في مسار حوله.

لندرس فيما يلي حركة جسم على قطع زائد، كما هو موضح بالشكل (14-3) فنلاحظ أنه يأتي من بعيد على الخط 1 ثم ينحرف لبتعد مرة أخرى على الخط 2. وقد عرفنا زاوية التشتت Θ سابقاً بالعلاقة (54-3):

$$\Theta = \pi - 2\alpha$$

حيث α الزاوية التي تنتهي إليها θ عندما يبتعد الجسم كثيراً عن مركز القوة، أي عندما تؤول r إلى ما لانهاية ونجدها من (55-3) وتعويض ϵ من (53-3):

$$\tan \frac{\Theta}{2} = \cot \alpha = \sqrt{\frac{mk^2}{2EL^2}} \quad (80-3)$$



الشكل (14-3)

فإذا افترضنا أن سرعة الجسيم كانت v_0 عندما كان على بعد كبير من مركز القوة وأن المسافة العمودية بين مساره الأصلي ومركز القوة s عندئذ نكتب زخمه الزاوي L على النحو:

$$(81-3) \quad L = mv_0 s$$

وطاقته الكلية:

$$(82-3) \quad E = \frac{1}{2} mv_0^2$$

يطلق على s اسم **معامل التصادم** (impact parameter).

بتعويض L و E في (80-3) نجد:

$$(83-3) \quad \tan \frac{\Theta}{2} = \frac{k}{msv_0^2}$$

تربط العلاقة الأخيرة بين زاوية تشتت الجسيم من جهة، وطاقته الابتدائية ومعامل التصادم، الذي يقترب به من مركز التشتت، من جهة أخرى. كتطبيق على تشتت رزفورد نعتبر ظاهرة تشتت جسيم مشحون إيجابياً (كجسيم α) من نواة ثقيلة موجبة أيضاً. فعندما نطلق عدداً كبيراً من α على صفيحة رقيقة من معدن ثقيل، كالذهب مثلاً، تصير كل نواة مركز قوة طاردة مؤثرة على كل جسيم α قادم. فإذا كان عدد الجسيمات القادمة N وعدد الجسيمات المنحرفة عن مسارها "خلال زاوية محصورة بين Θ و $\Theta \pm d\Theta$ هو dN عندئذ نعرف مساحة مقطع التشتت (scattering cross section) σ بالعلاقة:

$$(84-3) \quad d\sigma = \frac{1}{n} \frac{dN}{N}$$

حيث n عدد مراكز التشتت (النوى) في واحدة المساحة من الصفيحة. يمكن إعطاء $d\sigma$ مفهوماً هندسياً بأنه المساحة العنصرية حول مركز قوة واحد التي إن مر الجسيم من خلالها فإنه سينحرف عن مساره بزاوية محصورة بين Θ و $\Theta \pm d\Theta$ ، وتكون المساحة الكلية بوحدة السطح الناتجة عن وجود n مركز قوة هي

$n d\sigma$. من ثم إذا كان هناك N جسيم قادم فإن عدد الجسيمات المنحرفة dN هو $N n d\sigma$, أي أن $dN = N n d\sigma$. هذا ماكتبناه سابقاً.

يمكن أن نربط بين مساحة مقطع التشتت $d\sigma$ وزاوية التشتت Θ من (80-3) بوضع:

$$(85-3) \quad \frac{d\Theta}{2 \cos^2 \frac{\Theta}{2}} = - \frac{k}{mv_0^2 s^2}$$

فنلاحظ من الشكل (14-3) أن:

$$(86-3) \quad d\sigma = 2\pi s ds$$

لذا يكون:

$$(87-3) \quad d\sigma = \left(\frac{k}{2mv_0^2} \right)^2 \frac{2\pi \sin \Theta}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}} d\Theta$$

يطلق على العلاقة الأخيرة اسم قانون رزفورد في التشتت.

3- 14 أمثلة عامة

□ مثل 1-3 الحركة على مسار دائري واستقرار المدار (orbital stability)

يتحرك جسيم m على مسار دائري تحت تأثير قوة مركزية من الشكل:

$$F(r) = -\frac{k}{r^n}$$

حيث n عدد صحيح. ما أصغر قيمة يمكن أن تأخذها n بحيث يكون المسار دائرياً مستقراً؟

الحل: إذا تحرك الجسيم على مسار دائري وتعرض لبعض الاهتزازات خلال حركته وبقي مع ذلك يتحرك على مسار مغلق قريب من مساره الدائري الأصلي، عندئذ نقول إن هذا المسار مستقر. أما إذا خرج عن طريقه بشكل كبير وأفلت من حركته الدائرية نهائياً فإننا نقول أن المسار غير مستقر.

سنحقق في هذا المثل من كون المسار مستقراً أم لا بطريقتين:

أ - طريقة الجهد الفعّال:

وجدنا في الفقرة (3-3) أنه حتى يتحرك جسيم خاضع لقوة مركزية جاذبة في

مسار مغلق يجب أن يكون لجده الفعّال نهاية صغرى ، لذا نكتب $V(r)$

$$V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

حيث نجد $V(r)$ من معادلة القوة:

$$V(r) = -\int_{\infty}^r F(r) dr = -\frac{k}{(1-n)r^{n-1}}$$

بالتعويض في $V(r)$ والاشتقاق نجد:

$$\frac{dV(r)}{dr} = -\frac{L^2}{mr^3} + \frac{k}{r^n}$$

نلاحظ أن $\frac{dV(r)}{dr} = 0$ عندما تكون r محققة للمعادلة:

$$-\frac{L^2}{mr^3} + \frac{k}{r^n} = 0$$

أي عندما:

$$\frac{L^2}{2mr^2} = \frac{k}{2r^{n-1}}$$

لكن حتى يكون المسار دائرياً يجب أن تكون $r=0$ وعندها تصير الطاقة الكلية:

$$E = V(r_0) = \frac{L^2}{2mr_0^2} - \frac{k}{n-1} \frac{1}{r_0^{n-1}}$$

بالاستفادة من المعادلة السابقة نجد:

$$E = \frac{k}{r_0^{n-1}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n-1} \right)$$

لكن الطاقة الكلية لجسم خاضع لقوة مركزية جاذبة، يدور في مسار مغلق (أي أنه مرتبط *bound*) يجب أن تكون سالبة، أي يجب أن يكون:

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{n-1}$$

أي أن:

$$n < 3$$

هذه هي القيم الممكنة لـ n .

ب - طريقة تغيير نصف القطر

لنفترض أن الجسم يتحرك على مسار دائري نصف قطره ثابت $r = r_0$ عندئذ نجد من معادلة الحركة (5-3) أن:

$$mr_0\dot{\theta}^2 = F(r_0)$$

وبتعويض $\dot{\theta}$ من (7-3) نجد:

$$-\frac{L^2}{mr_0^3} = F(r_0)$$

نفترض الآن أن نصف القطر سيتغير بمقدار x فنضع:

$$r = r_0 + x$$

بالتعويض في معادلة الحركة (5-3) والاستفادة من (7-3) نجد:

$$m\ddot{x} - \frac{L^2}{m}(r_0 + x)^{-3} = F(r_0 + x)$$

بنشر $(r_0 + x)^{-3}$ و $F(r_0 + x)$ بحسب سلسلة تايلور نجد:

$$m\ddot{x} - \frac{L^2}{m} r_0^{-3} (1 - 3 \frac{x}{r_0} + \dots) = F(r_0) + x \frac{dF(r)}{dr} \Big|_{r=r_0} + \dots$$

ومنه:

$$m\ddot{x} + \left[-\frac{3}{r_0} F(r_0) - \frac{dF(r)}{dr} \Big|_{r=r_0} \right] x = 0$$

حيث أهملنا الحدود الحاوية على x^2 أو قوى أكبر من ذلك.

نلاحظ من المعادلة الأخيرة أن x ستتغير دورياً وتبقى سعتها محدودة القيمة إذا

كان:

$$(88-3) \quad \frac{3}{r_0} F(r_0) + \frac{dF(r)}{dr} \Big|_{r=r_0} < 0$$

هذا هو الشرط الذي الذي يجب أن تحققه أي قوة مركزية حتى يتحرك الجسم

الخاضع لها في مسار دائري مستقر نصف قطره $r=r_0$.

في حالة كون $F(r)$ من الشكل:

$$F(r) = -\frac{k}{r^n}$$

نجد أن الشرط السابق يعطي:

$$-\frac{3}{r_0} \frac{k}{r_0^n} + n \frac{k}{r_0^{n-1}} < 0$$

أي أن:

$$n < 3$$

هذه هي نفس المتراجحة التي وجدناها بالطريقة الأولى.

لأبأس من التنويه إلى أنه لو كانت (88-3) موجبة لصارت المعادلة التفاضلية لـ x

على النحو:

$$m\ddot{x} - \omega^2 x = 0$$

حيث:

$$\omega^2 = \frac{3}{r_0} F(r_0) + \left. \frac{dF(r)}{dr} \right|_{r=r_0}$$

لا تمثل المعادلة التفاضلية لـ x في هذه الحالة حركة اهتزازية، فإما أن تزداد x أو تتناقص باستمرار، مما يعني أنه في حالة اضطراب المسار الدائري للجسيم خلال حركته فإنه سينهار تماماً بحيث يبتعد الجسم إلى ما لانهاية أو يسقط إلى مركز القوة. □

□ مثل 2-3 تحديد ثوابت المسار من الشروط الابتدائية

يدور قمر اصطناعي في مسار دائري نصف قطره r_0 عندما تبدأ محركاته بالعمل لفترة وجيزة لتزيد سرعته بمقدار 10%. مامعادلة المسار الجديد ومأبعد أوجهه عن المحرق (البؤرة)؟

الحل: نفترض أن سرعة الجسم الأصلية على مداره الدائري هي v_0 ونكتب قيمة القوة المركزية المؤثرة عليه بالشكل:

$$F(r) = \frac{mv_0^2}{r_0} = \frac{k}{r_0^2}$$

ومنه:

$$\frac{k}{mr_0} = v_0^2$$

الآن: عندما يتحرك القمر على مسار غير دائري فإن زخمه الزاوي ثابت يساوي:

$$L = mr^2\dot{\theta} = mr_0^2\dot{\theta}_0^2 = mr_0v_c$$

حيث r_0 و $\dot{\theta}_0$ موضعه وسرعته الزاوية عندما $\theta = 0$ ، و v_c سرعته الجديدة بعد تشغيل المحركات.

من ثم نكتب معامل شنود المسار الجديد من العلاقة (3-67) (بعد تعويض $\theta=0$ و

$$r=r_0$$

$$\varepsilon = -1 + \frac{L^2}{mkr_0} \Rightarrow \frac{L^2}{mk} = r_0(\varepsilon + 1)$$

بتعويض L و k بقيمتيهما نجد:

$$\varepsilon = \left(\frac{v_c}{v_0}\right)^2 - 1$$

لكن $v_c = 1.1 v_0$ ، فيكون:

$$\varepsilon = 0.21$$

لتصير معادلة المسار الجديد:

$$r = \frac{L^2 / mk}{-1 + 0.21 \cos \theta} = r_0 \frac{1.21}{-1 + 0.21 \cos \theta}$$

نجد بعد أوج المدار الجديد عن المحرق من المعادلة السابقة بوضع $\theta = \pi$ أي:



$$r_{\max} = r_0 \frac{1.21}{1 - 0.21} = 1.53 r_0$$

ملحق - الخواص الهندسية للمنحنيات القطعية

المعادلة العامة للمنحنيات القطعية هي :

(3-89)

$$r = \frac{p}{\pm 1 + \varepsilon \cos \theta}$$

أ - القطع الزائد (Hyperbola) $\varepsilon > 1$:

القطع الزائد هو المنحني الناتج عن كل النقاط التي يكون الفرق بين بعديها عن

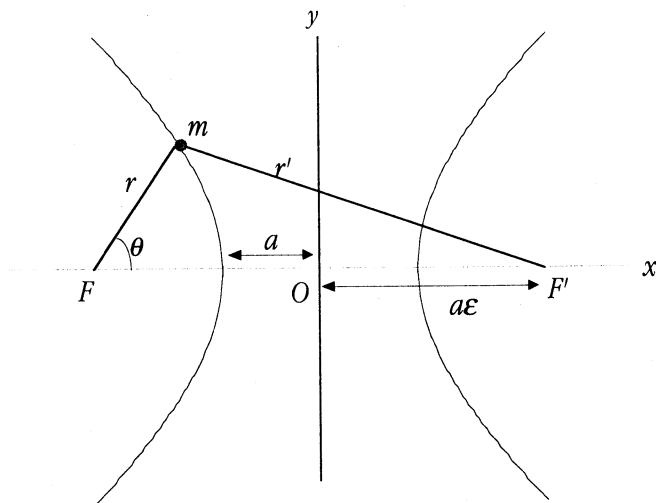
نقطتين معينتين ثابتاً، كما في الشكل (3-15) بحيث يكون:

(3-90)

$$r - r' = \pm 2a$$

حيث تعطي الإشارة الموجبة الفرع الموجب من القطع بينما تعطي الإشارة السالبة الفرع السالب منه، بينما يطلق على F و F' اسم المحرقين.
نكتب معادلة القطع الزائد بالشكل:

$$r = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{\pm 1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (90-3)$$



الشكل (15-3)

ب - القطع الناقص ($\varepsilon < 1$ Ellipse):

القطع الناقص هو المنحني الناتج عن كل النقاط التي يكون مجموع بعدها عن نقطتين معينتين ثابتاً ، كما في الشكل (16-3)، فنكتب:

$$r + r' = 2a \quad (91-3)$$

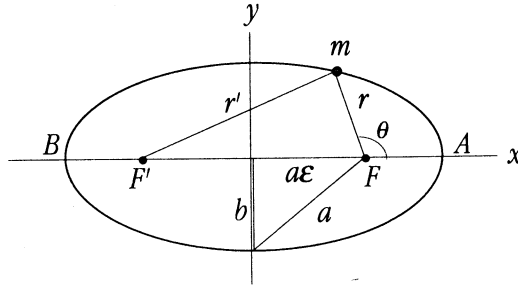
نكتب معادلة القطع بالشكل :

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (92-3)$$

يرتبط طول نصف القطر الكبير (a) بطول نصف القطر الصغير (b) :

$$b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2) \quad (93-3)$$

تسمى A في الشكل (16-3) نقطة الاقتراب القصى، و B نقطة الابتعاد القصى.

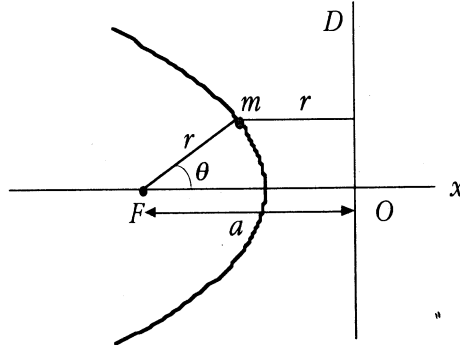


الشكل (16-3)

ج - القطع المكافئ ($\epsilon=1$ Parabola)

القطع المكافئ هو المنحني الناتج عن كل النقاط التي تبعد أي منها عن خط مستقيم معين نفس بعدها عن نقطة ثابتة ، كما في الشكل (17-3). تكون معادلة القطع هي:

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (94-3)$$



الشكل (17-3)

مسائل

1-3 حدد أي من القوى المركزية التالية جاذبة نحو أو طاردة بعيداً عن المركز (\mathbf{r}_1 متجه

وحدة على امتداد \mathbf{r}): (أ) $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}_1/r^{1/2}$, $k > 0$, (ب) $\mathbf{F} = -4\pi r^3 \mathbf{r}_1$, (ج) $\mathbf{F} = r(r-1)\mathbf{r}_1/(r^2+1)$

2-3 تعطى طاقة الوضع للإلكترون في جزئ الهيدروجين بالعلاقة $V = -(e/r_1 + e/r_2)$ حيث r_1 و r_2 بعدي الإلكترون عن النواتين المتواجدتين عند النقطتين $(-a, 0, 0)$ و $(a, 0, 0)$ والثابت $k = 1/4\pi\epsilon_0$ ثابت قوة كولوم المعروف. جد القوة المؤثرة على الإلكترون $F(r)$ ، حيث r بعده عن المبدأ.

3-3 برهن أن قيمة السرعة المساحية (areal velocity) في الإحداثيات الديكارتية هي $\frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})$.

4-3 يخضع جسيم لقوة مركزية من الشكل $F(r) = -k/r^3$ ، حيث $k > 0$ ، فبيدأ حركته عند نقطة $x=a$ على محور السينات الموجب بسرعة v_0 تصنع زاوية α مع ذلك المحور. برهن أن المعادلة التفاضلية للحركة هي: $\ddot{r} = -(k - ma^2 v_0^2 \sin^2 \alpha) / mr^3$.

5-3 برهن أن معادلة مسار الجسيم المذكور في المسألة 4-3 تعطى بالعلاقة:

$$\gamma = ma^2 v_0^2 \sin^2 \alpha \quad \text{حيث} \quad u = 1/r \quad d^2 u / d\theta^2 + (1 - \gamma)u = 0$$

6-3 جد كل المسارات الممكنة لجسيم يتحرك تحت تأثير قوة مركزية بحيث تبقى سرعته ثابتة القيمة دوماً.

7-3 (أ) ما طاقة الوضع لجسيم يتحرك تحت تأثير قوة مركزية $F = -k/r^2$ ، حيث $k > 0$ ؟ (ب) ما الشغل اللازم لنقل هذا الجسيم من مسار دائري نصف قطره a إلى آخر نصف قطره b ؟ هل يعتمد هذا الشغل على الطريق المتبع؟ علل.

8-3 يتحرك جسيم تحت تأثير القوة المذكورة في المسألة 7-3 فبيدأ على دائرة نصف قطرها a من السكون وينتقل إلى أخرى نصف قطرها b . برهن أن سرعته هناك تعطى بالعلاقة $[2k(a^3 - b^3)]^{1/2}$ ، وأنها مستقلة عن الطريق المتبع.

9-3 يتحرك جسيم تحت تأثير قوة جاذبة متناسبة عكساً مع مربع البعد. ما تردد

الحركة الدائرية وتردد الاهتزازات الصغيرة حولها؟

10-3 يتحرك جسيم تحت تأثير قوة مركزية طاقة وضعها $V=k r^4$ ، حيث $k>0$. (أ) جد القيم الممكنة للطاقة الكلية E والزخم الزاوي L حتى يكون المسار دائرياً نصف قطره a وحدد دور هذه الحركة الدائرية (ب) ماتردد الاهتزازات الصغيرة حول هذه الحركة الدائرية؟

11-3 تعطى طاقة الوضع الناتجة عن قوة التجاذب النووي بين البروتون والنيوترون في النواة حسب نموذج يوكاوا (Yukawa Potential) بـ $V(r)=k \exp(-\alpha r)/r$ ، حيث $k<0$. (أ) ما القوة بين البروتون والنيوترون؟ (ب) ناقش أنواع الحركة الممكنة لجسيم m خاضع لهذه القوة. (ج) ما E و L لهذا الجسيم حتى يتحرك على مسار دائري نصف قطره a ، وماتردد الاهتزازات الصغيرة حولها؟ (د) برهن أن المسارات الدائرية (تقريباً) ستصير مغلقة تقريباً إذا كانت a صغيرة جداً.

12-3 (أ) ادرس أنواع الحركة الممكنة لجسيم خاضع لقوة $F(r)=-k/r^2+k'/r^3$ ، حيث $k>0$ واعتبر إشارتي k' الممكنتين. (ب) حل المعادلة القطرية وبرهن أن المسارات المحدودة تعطى بالعلاقة $r=a(1-\epsilon^2)/(1+\epsilon \cos \theta)$ عندما يكون $L^2 > -mk'$. (ج) برهن أن المعادلة السابقة للمسار هي قطع ناقص دوّار، وجد السرعة الزاوية لدورانه، وحدد فيما إذا كان الدوران بنفس اتجاه حركة الجسيم أم بعكسها.

13-3 وصلت سفينة الفضاء الروسية سبوتنك I إلى مسافة اقتراب قصوى من سطح الأرض هي 227 km بسرعة 28710 km/h. (أ) مامسافة الابتعاد القصوى لهذه السفينة ومادور حركتها حول الأرض، التي نفترض أنها كروية تماماً بنصف قطر 6400 km؟ (ضع تسارع الجاذبية قرب سطح الأرض 9.8 m/s^2).

14-3 شوهد مذنب (comet) على بُعد 10^8 كم من الشمس يسير بسرعة 51.6 km/s تصنع زاوية 45° مع الخط الواصل بين مركز الأرض ومركز الشمس. جد معادلة المسار لهذا المذنب بالإحداثيات القطبية بفرض أن الشمس تقع عند المبدأ وأن محور السينات يقع على الخط الواصل بين مركزي الأرض والشمس (ضع كتلة الشمس 2×10^{30} كغ).

15-3 (أ) ناقش بطريقة الجهد الفعّال أنواع الحركة الممكنة لجسيم خاضع لقوة من الشكل $H(r) = -k/r^3$ ، حيث $k > 0$ ، وجد قيم E و L لكل حركة ممكنة. (ب) برهن أن معادلة المسار ستكون من أحد الأشكال التالية:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= A \cos[\beta(\theta - \theta_0)] \\ \frac{1}{r} &= A \cosh[\beta(\theta - \theta_0)] \\ \frac{1}{r} &= A \sinh[\beta(\theta - \theta_0)] \\ \frac{1}{r} &= A(\theta - \theta_0) \\ \frac{1}{r} &= \frac{1}{r_0} e^{\pm \beta \theta}\end{aligned}$$

16-3 بفرض أن الأرض كروية تماماً، وأن نفقاً يصل القطب الشمالي بالقطب الجنوبي عبر مركزها قد شُق ، وأن قوة التجاذب بين جسيمين m_1 و m_2 هي من الشكل $F = -(Gm_1m_2/r^2)\mathbf{r}_1$ ، حيث \mathbf{r}_1 متجه وحدة من m_1 إلى m_2 (عندما نحسب القوة التي يخضع لها m_2)، برهن عندئذ أنه إذا تركنا جسيماً m عند القطب الشمالي فإنه سيتحرك داخل النفق حركة اهتزازية بسيطة وجد ترددها. (مساعدة: احسب القوة المؤثرة على الجسيم على بعد r من مركز الأرض، بفرض أن كثافتها الكتلية ثابتة) .

17-3 ما القوة المركزية التي تؤثر على جسيم يتحرك على المسار $r = ae^{k\theta}$ ، حيث a و k ثابتان؟

18-3 يتحرك جسيم تحت تأثير قوة مركزية فيرسم المسار $r = c\theta^2$. (أ) ما القوة المؤثرة على الجسيم؟ (ب) حدد كيف تتغير θ مع الزمن بفرض أن $\theta = 0$ عندما $t = 0$.

19-3 برهن أنه يمكن كتابة معادلة المسار لجسيم خاضع لقوة مركزية بالشكل:

$$\frac{L^2}{2m} \left[\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u^2 \right] + V\left(\frac{1}{u}\right) = E$$

حيث $u = 1/r$.

يُطلق على العلاقة السابقة معادلة الطاقة للمسار (energy equation of the orbit).

20-3 (أ) اكتب معادلات الحركة لجسيم خاضع للقوة $R(r) = -k/r^2 - \epsilon/r^4$ ، حيث $k > 0$.
 (ب) مامعادلة المسار وماشروط كونه دائرياً مستقراً؟ (ج) برهن أنه عندما تتغير r من أصغر قيمة لها إلى أكبر قيمة فإن θ تتغير من الصفر إلى قيمة أكبر من π بمقدار $\epsilon/ka^2 \sim$ في حالة الحركة الدائرية شبه المستقرة (الاهتزازية).

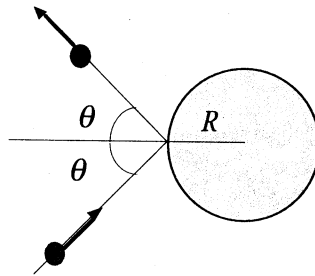
21-3 يتحرك مذنب في مسار قطع مكافئ في نفس مستو مسار الأرض حول الشمس الذي يمكن اعتباره دائرياً نصف قطره a . برهن أن نقاط تلاقي المسارين تعطى من العلاقة $\cos \theta = -1 + 2p/a$ حيث p نقطة ذنب المسار المعروفة عندما $\theta = 0$.

22-3 استخدم نتيجة المسألة 21-3 لبرهان أن الزمن الذي يبقى فيه المذنب ضمن مسار الأرض يساوي $(\sqrt{2}/3\pi)[(2p/a)+1][1-(p/a)]^{1/2}$ من السنة. برهن أيضاً أن القيمة العظمى لهذا الزمن هو $2/3\pi$ من السنة، أي حوالي 11 اسبوعاً.

23-3 (أ) برهن أن مسار جسيم خاضع لقوة مركزية طاردة $F = k/r^3$ ، حيث $k > 0$ ، له شكل المسار الأول في المسألة 9-3 وعبر عن β بدلالة k و E و L و m . (ب) برهن أن مساحة مقطع التشتت تعطى بالعلاقة:

$$d\sigma = \frac{2\pi^3 k}{mv_0^2} \frac{\pi - \Theta}{\Theta^2 (2\pi - \Theta)^2} d\Theta$$

24-3 يصطدم جسيم صغير بكرة صلبة نصف قطرها R ويرتد عنها بحيث تكون زاوية السقوط مساوية لزاوية الإرتداد تماماً، كما في الشكل (18-3). مامساحة التشتت العنصرية $d\sigma$ عندما يتشتت الجسيم بزاوية محصورة بين Θ و $\Theta \pm d\Theta$. كامل $d\sigma$ وبرهن أن مساحة مقطع التشتت الكلية هي πR^2 كما هو متوقع.



الشكل (18-3)

25-3 ما القوة المركزية المؤثرة على جسيم يتحرك على المنحنى $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ ؟

26-3 تعطى طاقة الوضع لهزاز توافقى في الفضاء بالعلاقة $V = kr^2/2$. ارسم منحنى الجهد الفعّال وناقش الحالات الممكنة للحركة وجد تردد الحركة الدائرية (إن وجدت) وتردد الاهتزازات الصغيرة حولها.

27-3 حدد مسار جسيم يتحرك تحت تأثير قوة مركزية من الشكل $F = -kr$ حيث $k > 0$ إذا بدأ من $r = a$ و $\theta = 0$ بسرعة v_0 عمودية على محور السينات. مانوع المسار؟

28-3 برهن أن مسار جسيم خاضع لقوة $F = Ar_1/(r^4 \cos \theta)$ أو $F = Br_1/(r^2 \cos^3 \theta)$ دائري $r = 2a \cos \theta$. ماذا تستنتج عن القوة التي تتوصل إليها من معادلة المسار؟

29-3 برهن أنه لا توجد قوة مركزية تجعل الجسيم الخاضع لها يتحرك على خط مستقيم.

30-3 ما القوة المركزية التي تجعل سرعة الجسيم الخاضع لها متناسبة مع r^{-n} ، حيث n ثابت؟

31-3 تتحرك سفينتا فضاء على قطع ناقص واحد معامل شذوذه ϵ بحيث أن بينهما مسافة صغيرة D عند نقطة الذنب. برهن أن المسافة بينهما عند نقطة الأوج ستصير $D(1-\epsilon)/(1+\epsilon)$.

32-3 برهن أن القوة المركزية الوحيدة التي تباعدها (divergence) يساوي الصفر $(\nabla \times \mathbf{F} = 0)$ يجب أن تكون متناسبة عكساً مع مربع البعد.

33-3 يتحرك قمر اصطناعي حول الأرض بحيث أن أكبر سرعة له هي v_{\max} وأقل سرعة v_{\min} . برهن أن معامل شذوذ المسار هو $(v_{\max} - v_{\min})/(v_{\max} + v_{\min})$.

34-3 برهن أنه إذا كان دور حركة القمر الاصطناعي المذكور في المسألة 33-3 هو τ فإن طول نصف القطر الكبير لمساره هو $\tau(v_{\max} v_{\min})^{1/2}/2\pi$.

35-3 تعطى المعادلة التفاضلية لمسار كوكب حول نجم وفق نظرية النسبية الخاصة لأينشتين بالعلاقة:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{mL^2} + \gamma u^2$$

حيث $\gamma = 3k/mc^2$ و c سرعة الضوء.

(أ) برهن أنه باختيار مناسب للمحاور فإن معادلة المسار تعطى بـ:

$$r = \frac{k / mL^2}{1 + \epsilon \cos \alpha \theta}$$

حيث $\alpha = 1 - \gamma k / mL^2$. (ب) استخدم (أ) لبرهان أن المسار قطع ناقص يدور ببطء في

الفضاء بسرعة زاوية هو $2\pi \gamma k / mL^2$. (ج) برهن أنه في حالة كوكب عطارد

(Mercury) فإن هذا الدوران يعادل قوساً زاويته 43 ثانية من الدرجة في القرن. تم

فعلاً قياس هذا الدوران بدقة عالية فتم التحقق من صحة نظرية أينشتاين.